Una dualidad topológica para k-álgebras de Heyting aproximadas

Florencia Valverde

Instituto de Ciencias Básicas
Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes
Universidad Nacional de San Juan

Congreso Dr. Antonio Monteiro
7 de junio de 2023

Trabajo en colaboración con Federico Almiñana y Gustavo Pelaitay

Introducción

Una de las teorías más recientes empleada para el análisis de datos es la Teoría de los Conjuntos Aproximados RST (Rough Set Theory).

Introducción

Una de las teorías más recientes empleada para el análisis de datos es la Teoría de los Conjuntos Aproximados RST (Rough Set Theory).

Esta teoría se considera como una de las cinco áreas claves y no tradicionales de la Inteligencia Artificial y de la Teoría de la Información Incompleta, pues constituye una herramienta muy útil para el manejo de la información incompleta o imprecisa.

En

- E. SanJuan. **Heyting algebras with Boolean operators for rough sets and information retrieval applications**, Discrete Applied Mathematics, 156 (2008), 967–983.

Eric SanJuan presentó un formalismo algebraico sobre generalizaciones de conjuntos aproximados y demostró que estas generalizaciones son adecuadas para modelar la relevancia de los documentos en un Sistema de Recuperación de Información.

A cada conjunto ordenado finito $(T; \leq)$, le asoció una clase de álgebras llamadas T-**álgebras de Heyting aproximadas** (o T-álgebras aproximadas).

Una T-álgebra de Heyting aproximada es un álgebra

$$\langle A, \wedge, \vee, \to, \{\pi_t\}_{t\in T}, 0, 1\rangle,$$

donde $\langle A, \wedge, \vee, \to, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting y $\{\pi_t\}_{t\in T}$ es una familia de operaciones unarias sobre A que verifica las siguientes condiciones:

(p1) $\pi_t(x \vee y) = \pi_t(x) \vee \pi_t(y)$,

(p2) $\pi_t(x \wedge y) = \pi_t(x) \wedge \pi_t(y)$,

(p3) $\pi_t(\pi_s(x)) = \pi_s(x)$,

(p4) $\pi_t(0) = 0$,

(p5) $\pi_t(x) \vee \neg\pi_t(x) = 1$ donde $\neg y := y \to 0$,

(p6) $\pi_t(x \to y) = \bigwedge_{v\geq t} (\pi_v(x) \to \pi_v(y))$,

(p7) $\bigwedge_{v\in T} \pi_v(x) \leq x$.

Si T es una cadena: $1 \leq 2 \leq \cdots \leq k-1$, con $k \geq 2$, entonces

$$\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \{\pi_t\}_{t \in T_k}, 0, 1 \rangle,$$

se denomina k-**álgebra de Heyting aproximada**.

k-álgebras de Heyting aproximadas

Notación

Sea k un número entero, $k \geq 2$. Denotaremos con $[k]$ a:

$$\{1, \ldots, k-1\}.$$

Una *k-álgebra de Heyting aproximada* (o H_k-álgebra) es un álgebra

$$\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow \{\pi_t\}_{t\in[k]}, 0, 1\rangle$$

donde el reducto $\langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Heyting y $\{\pi_t\}_{t\in[k]}$ es una familia finita de operaciones unarias sobre A que satisfacen las siguientes condiciones para cualquier $t, s \in [k]$, $x, y \in A$:

(p1) $\pi_t(x \vee y) = \pi_t(x) \vee \pi_t(y)$,

(p2) $\pi_t(x \wedge y) = \pi_t(x) \wedge \pi_t(y)$,

(p3) $\pi_t(\pi_s(x)) = \pi_s(x)$,

(p4) $\pi_t(0) = 0$,

(p5) $\pi_t(x) \vee \neg\pi_t(x) = 1$, donde $\neg y := y \rightarrow 0$,

(p6) $\pi_t(x \rightarrow y) = \bigwedge_{v\geq t} (\pi_v(x) \rightarrow \pi_v(y))$,

(p7) $\pi_1(x) \leq x$.

Observación

- En particular, para $k = 3$, se puede chequear que la operación unaria $\sim$ definida por
$$\sim x = (x \vee \neg x) \wedge \neg \pi_1(x) \tag{1}$$
es una negación de De Morgan.

  Por lo tanto, la clase de las 3-álgebras de Heyting aproximadas coincide con la clase de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil de orden 3.

Observación

- En particular, para $k = 3$, se puede chequear que la operación unaria $\sim$ definida por
$$\sim x = (x \vee \neg x) \wedge \neg \pi_1(x) \tag{1}$$
es una negación de De Morgan.

  Por lo tanto, la clase de las 3-álgebras de Heyting aproximadas coincide con la clase de las álgebras de Łukasiewicz–Moisil de orden 3.

Notación

Con $\mathbf{H}_k$ denotaremos a la clase de las k-álgebras de Heyting aproximadas.

Teorema de representación funcional

En esta sección, damos un teorema de representación funcional y determinamos una condición necesaria y suficiente bajo la cual dicho sumergimiento es sobreyectivo.

Definición

Sea $A \in \mathbf{H}_k$. Un elemento x de A es t-invariante si $\pi_t(x) = x$.

Denotaremos por $\pi_t(A)$ al conjunto de todos los elementos t-invariantes de A.

Estos elementos juegan un papel importante en el estudio de las H_k-álgebras ya que, en particular, coinciden con los elementos booleanos como mostramos en la siguiente proposición.

Estos elementos juegan un papel importante en el estudio de las H_k-álgebras ya que, en particular, coinciden con los elementos booleanos como mostramos en la siguiente proposición.

Proposición

Sea $A \in \mathbf{H}_k$. *Entonces* $\pi_t(A) = B(A)$ *para todo* $t \in [k]$.

Definición

Sea B un álgebra de Boole. Consideremos el conjunto:

$$B\uparrow^{[k]} := \{f : [k] \longrightarrow B : \ t \leq v \Longrightarrow f(t) \leq f(v)\}.$$

En $B\uparrow^{[k]}$ definimos las siguientes operaciones:

1. $(f \vee g)(t) = f(t) \vee g(t)$,
2. $(f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t)$,
3. $(f \to g)(t) = \bigwedge_{v \geq t} (\neg f(v) \vee g(v))$,
4. $(\pi_t f)(r) = f(t)$,
5. $\mathbf{0}(t) = 0 \ , \ \mathbf{1}(t) = 1$.

A la estructura $\langle B\uparrow^{[k])}, \wedge, \vee, \to, \{\pi_t\}_{t\in[k]}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ la llamaremos álgebra funcional asociada al álgebra de Boole B.

Lema

Sea B un álgebra de Boole. Entonces,

$$\langle B\uparrow^{[k])}, \wedge, \vee, \rightarrow, \{\pi_t\}_{t\in[k]}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$$

es una H_k-álgebra.

Teorema de Representación

Sea $A \in \mathbf{H}_k$. Entonces la función

$$h : A \longrightarrow B(A)\uparrow^{[k]}$$

definida por

$$h(x)(t) = \pi_t(x) \tag{2}$$

es un monomorfismo de H_k-álgebras.

H_k-álgebras centradas

En lo que sigue, damos condiciones necesarias y suficientes para que el monomorfismo del teorema de representación sea sobreyectivo.

Definición

Sea $A \in \mathbf{H}_k$. Entonces, el elemento c_t es llamado el t-centro de A si se verifican las siguientes condiciones:

$$\pi_i(c_t) = \begin{cases} 0 & si \quad 1 \leq i < t \\ 1 & si \quad t \leq i \leq k-1 \end{cases} .$$

Si para cada $t \in [k]$ existe el t-centro de A, entonces diremos que $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ es una H_k-álgebra centrada o que A es k-centrada.

Ejemplo

Sea $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ *el álgebra de Boole de dos elementos. Entonces*

$$\langle \mathbf{2} \uparrow^{[k]}, \wedge, \vee, \rightarrow, \{\pi_t\}_{t \in [k]}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$$

es k-centrada.

Teorema

Sea $A \in \mathbf{H}_k$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *A es k-centrada,*

(b) *A es isomorfo a $B(A)\uparrow^{[k]}$.*

Dualidad topológica

- A continuación, desarrollamos una **dualidad topológica** para las H_k-álgebras y caracterizamos, por medio de esta dualidad, las H_k-álgebras subdirectamente irreducibles.

Dualidad topológica

- A continuación, desarrollamos una **dualidad topológica** para las H_k-álgebras y caracterizamos, por medio de esta dualidad, las H_k-álgebras subdirectamente irreducibles.

- En primer lugar, repasaremos la dualidad de Priestley para las álgebras de Heyting.

La dualidad de Priestley para las álgebras de Heyting establece una equivalencia dual entre la categoría $\mathbb{HA}$ de las álgebras de Heyting y los homomorfismos de las álgebras de Heyting y la categoría $\mathbb{HS}$ de espacios de Heyting y morfismos p-continuos (llamados morfismos de Heyting),

$$\mathfrak{X} : \mathbb{HA} \leftrightarrows \mathbb{HS}^{op} : D$$

Para cada álgebra A de Heyting, $\mathfrak{X}(A)$ denota el conjunto de filtros primos de A y para cada espacio de Heyting X, $D(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos abiertos, cerrados y crecientes de X.

Tenemos que:

- $\sigma_A : A \longrightarrow D(\mathfrak{X}(A))$ definida por
$$\sigma_A(a) = \{P \in \mathfrak{X}(A) : a \in P\} \tag{3}$$
es un isomorfismo de álgebras de Heyting.
- $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathfrak{X}(D(X))$ definida por
$$\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\} \tag{4}$$
es un isomorfismo de espacios de Heyting.

La teoría de dualidad estilo Priestley ha sido desarrollada para la clase de las álgebras de Heyting y para varias clases de álgebras de Heyting con operadores adicionales.

- Sofronie-Stokkermans. **Priestley duality for SHn-algebras and applications to the study** of Kripke-style models for SHn-logics. Mult.-Valued Log. 5 (2000), no. 4, 281–305.
- S. A. Celani. **Simple and subdirectly irreducibles bounded distributive lattices with unary operators**. Int. J. Math. Math. Sci. (2006), Art. ID 21835, 20 pp.
- J. L. Castiglioni, M. S. Sagastume, J. H. San Martín. **On frontal Heyting algebras**. Rep. Math. Logic No. 45, (2010), 201–224.

En lo que sigue, extendemos la dualidad anterior a las H_k-álgebras.

Definición

Una estructura $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ es un H_k-espacio si se satisfacen las siguientes condiciones:

(S1) $(X, \leq, \tau)$ es un espacio de Heyting,

(S2) $f_t : X \to X$ es una función continua,

(S3) si $x \leq y$, entonces $f_t(x) = f_t(y)$,

(S4) para cada $t \leq v$, $f_t(x) \leq f_v(x)$,

(S5) $f_t(f_s(x)) = f_t(x)$,

(S6) $f_1(x) \leq x$,

(S7) $x \leq f_k(x)$,

(S8) $x \leq f_t(x)$ o $f_{t+1}(x) \leq x$, para todo $t \in [k-1]$, $k \geq 3$

Definición

Si $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ y $(X', \{f'_t\}_{t\in[k]})$ dos H_k-espacios, $f : X \to X'$ es un H_k-morfismo f de X en X' es continua y creciente, que satisface las siguientes condiciones:

(M1) si $f(x) \leq y$ existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ y $f(z) = y$.

(M2) $f'_t \circ f = f \circ f_t$, para todo $t \in [k]$.

Denotaremos con $\mathbb{HS}_k$ a la categoría de las H_k-espacios y H_k-morfismos y con $\mathbb{HA}_k$ a la categoría de las H_k-álgebras y sus correspondientes homomorfismos.

Lema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k*-espacio. Entonces*

$$\Psi(X) = (D(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \{\pi_t^X\}_{t\in[k]}, \emptyset, X)$$

es una H_k*-álgebra, donde* $\pi_t^X(U) = f_t^{-1}(U)$ *para cada* $U \in D(X)$*.*

Lema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k*-espacio. Entonces*

$$\Psi(X) = (D(X), \cap, \cup, \Rightarrow, \{\pi_t^X\}_{t\in[k]}, \emptyset, X)$$

es una H_k*-álgebra, donde* $\pi_t^X(U) = f_t^{-1}(U)$ *para cada* $U \in D(X)$. *Además la aplicación* $\varepsilon_X : X \longrightarrow \mathfrak{X}(D(X))$*, definida por*

$$\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) : x \in U\},$$

es un isomorfismo en la categoría $\mathbb{HS}_k$.

Lema

Sea $f : (X, \{f_t\}_{t\in[k]}) \longrightarrow (X', \{f'_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k*-morfismo sobreyectivo (inyectivo). Entonces, la aplicación* $\Psi(f)$ *de* $D(X')$ *en* $D(X)$*, definido por*

$$\Psi(f)(U) = f^{-1}(U) \tag{5}$$

es un H_k*-homomorfismo inyectivo (sobreyectivo).*

Los dos lemas previos muestran que Ψ es un funtor contravariante de la categoría $\mathbb{HS}_k$ en la categoría $\mathbb{HA}_k$.

Los dos lemas previos muestran que Ψ es un funtor contravariante de la categoría $\mathbb{HS}_k$ en la categoría $\mathbb{HA}_k$.

Para lograr nuestro objetivo necesitamos definir un funtor contravariente de $\mathbb{HA}_k$ en $\mathbb{HS}_k$.

Lema

Sea $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *una* H_k*-álgebra. Entonces*

$$\Phi(A) = (\mathfrak{X}(A), \{f_t^A\}_{t\in[k]})$$

es un H_k*-espacio, donde* $f_t^A(S) = \pi_t^{-1}(S)$ *para cada* $S \in \mathfrak{X}(A)$.

Lema

Sea $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *una* H_k*-álgebra. Entonces*

$$\Phi(A) = (\mathfrak{X}(A), \{f_t^A\}_{t\in[k]})$$

es un H_k*-espacio, donde* $f_t^A(S) = \pi_t^{-1}(S)$ *para cada* $S \in \mathfrak{X}(A)$*.*

Además, la aplicación $\sigma_A : A \longrightarrow D(\mathfrak{X}(A))$ *definida por*

$$\sigma_A(a) = \{P \in \mathfrak{X}(A) : a \in P\}$$

es un H_k*-isomorfismo.*

Lema

Sean $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ y $(A', \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ H_k-álgebras y $h : A \longrightarrow A'$ un H_k-homomorfismo. Entonces, la aplicación $\Phi(h) : \mathfrak{X}(A') \longrightarrow \mathfrak{X}(A)$, definida por

$$\Phi(h)(S) = h^{-1}(S) \tag{6}$$

es un H_k-morfismo.

Los lemas anteriores muestran que Φ es un funtor contravariante de $\mathbb{HA}_k$ en $\mathbb{HS}_k$.

Como consecuencia directa de los resultados anteriores y aplicando técnicas habituales es sencillo demostrar el siguiente:

Teorema

Las categorías $\mathbb{HA}_k$ *y* $\mathbb{HS}_k$ *son dualmente equivalentes.*

En esta sección consideraremos la noción de intervalo o segmento en H_k-espacio, que será de utilidad para demostrar algunas propiedades de estos.

En esta sección consideraremos la noción de intervalo o segmento en H_k-espacio, que será de utilidad para demostrar algunas propiedades de estos.

Definición

Sea $(X, \{f_{tu}\}_{t\in[k]})$ *un* H_k*-espacio. Un subconjunto* $I \subseteq X$ *es un intervalo si* $I = [x, y]$ *para algún* $x, y \in X$.

Lema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ un H_k-espacio. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

(i) $[f_1(x); f_{k-1}(x)] = \{f_i(x) : i \in [k]\}$,

(ii) $x \in [f_1(x); f_{k-1}(x)]$,

(iii) $\bigcup_{t\in[k]} f_t(X) = X$.

Proposición

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ un H_k-espacio. Entonces X es la suma cardinal de los conjuntos $[f_1(x); f_{k-1}(x)]$, con $x \in X$.

Proposición

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ un H_k-espacio, entonces X es la suma cardinal de una familia de cadenas, cada una de las cuales tiene a lo sumo $k-1$ elementos.

Proposición

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k-*espacio. Entonces, para toda cadena* $C \subseteq X$, *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $C = [f_1(x); f_{k-1}(x)]$ *para algún* $x \in X$,

(ii) C *es una cadena maximal en* X.

En esta sección usaremos la dualidad descripta para caracterizar el retículo de las congruencias $Con_{H_k}(A)$ de una H_k-álgebra A. Para este propósito introducimos la siguiente definición:

En esta sección usaremos la dualidad descripta para caracterizar el retículo de las congruencias $Con_{H_k}(A)$ de una H_k-álgebra A. Para este propósito introducimos la siguiente definición:

Definición

Sea $(X, \{f_t\}_{t \in [k]})$ un H_k-espacio. Un subconjunto Y de X es un k-conjunto si y solo si $Y = f_t^{-1}(Y)$ para cada $t \in [k]$.

A continuación, determinamos algunas propiedades de los k-conjuntos de un H_k-espacio, las cuales son bastantes útiles para caracterizar el retículo de las congruencias de una H_k-álgebra.

Proposición

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ un H_k-espacio e Y un subconjunto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *Y es $k-$conjunto,*

(ii) *Para cada $y \in Y$, $f_t(y) \in Y$, para todo $t \in [k]$.*

Lema

Cada cadena maximal de un H_k-espacio es un k-conjunto.

Lema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k-*espacio. Si* Y *es un subconjunto no vacío de* X, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Y *es un* $k-$*subconjunto,*

(ii) Y *es un subconjunto de* X *creciente y decreciente a la vez,*

(iii) Y *es suma cardinal de cadenas maximales en* X.

Lema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k-*espacio y sea* Y *un* $k-$*conjunto no vacío de* X. *Si* $X = [f_1(x), f_{k-1}(x)]$, *para todo* $x \in X$, *entonces* $X = Y$.

Los k-conjuntos cerrados de un H_k-espacio juegan un rol fundamental en la caracterización de las H_k-congruencias como se muestra a continuación.

Teorema

Sean $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ una H_k-álgebra y $(\mathfrak{X}(A), \{f_t^A\}_{t\in[k]})$ el H_k-espacio asociado con A. Entonces, el retículo $\mathcal{C}_k(\mathfrak{X}(A))$ de todos los k-conjuntos cerrados de $\mathfrak{X}(A)$ es anti-isomorfo al retículo $Con_{H_k}(A)$ de todas las H_k-congruencias de A.

Los resultados establecidos anteriormente nos permitieron caracterizar las H_k-álgebras subdirectamente irreducibles.

Teorema

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ un H_k-espacio y sea $(D(X), \{\pi_t^X\}_{t\in[k]})$ la H_k-álgebra asociada a X. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $X = [f_1(x), f_{k-1}(x)]$ *para todo* $x \in X$,

(ii) $(D(X), \{\pi_t^X\}_{t\in[k]})$ *es una* H_k*-álgebra simple,*

(iii) $(D(X), \{\pi_t^X\}_{t\in[k]})$ *es una* H_k*-álgebra subdirectamente irreducible.*

Corolario

La variedad $\mathbf{H}_k$ *es semisimple.*

Adicionalmente, pudimos probar que

Proposición

Sea $(X, \{f_t\}_{t\in[k]})$ *un* H_k*-espacio tal que* $X = [f_1(x), f_{k-1}(x)]$ *para todo* $x \in X$. *Entonces, existe un* H_k*-morfismo sobreyectivo de* $\mathfrak{X}(\mathbf{2}\uparrow^{[k]})$ *en* X.

Adicionalmente, demostramos que

Lema

$\mathfrak{X}\left(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}\right) = \left[f_1^{\mathbf{2}\uparrow^{[k]}}(P), f_{k-1}^{\mathbf{2}\uparrow^{[k]}}(P)\right]$ *para todo* $P \in \mathfrak{X}\left(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}\right)$.

Proposición

La H_k*-álgebra* $(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es simple.*

Adicionalmente, demostramos que

Lema

$\mathfrak{X}(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}) = \left[f_1^{\mathbf{2}\uparrow^{[k]}}(P), f_{k-1}^{\mathbf{2}\uparrow^{[k]}}(P)\right]$ *para todo* $P \in \mathfrak{X}(\mathbf{2}\uparrow^{[k]})$.

Proposición

La H_k*-álgebra* $(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es simple.*

Proposición

Toda subálgebra de $(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es simple.*

Teorema

Sea $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ una H_k-álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es una H_k-álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es isomorfa a una subálgebra de $\mathbf{2}\uparrow^{[k]}$.*

Teorema

Sea $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *una* H_k*-álgebra. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es una* H_k*-álgebra subdirectamente irreducible,*

(ii) $(A, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *es isomorfa a una subálgebra de* $\mathbf{2}\uparrow^{[k]}$.

Corolario

$(\mathbf{2}\uparrow^{[k]}, \{\pi_t\}_{t\in[k]})$ *genera la variedad* $\mathbf{H}_k$.

¡Muchas gracias por su atención!

- Düntsch, Ivo. A logic for rough sets. Theoret. Comput. Sci. 179 (1997), no. 1-2, 427–436.
- J. Green, N. Horne, E. Orłowska. (1996). A rough set model information retrieval, Fund. Inform. 28, 273–296.
- Pagliani, Piero. Rough set theory and logic-algebraic structures. Incomplete information: rough set analysis, 109–190, Stud. Fuzziness Soft Comput., 13, Physica, Heidelberg, 1998.
- Z. Pawlak, Rough Sets, Theoretical Aspects of Reasoning About Data, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- Eric San Juan, Heyting algebras with Boolean operators for rough sets and information retrieval applications, *Discrete Applied Mathematics* **156** (2008) 967–983.